

① ÚPLNÉ SVAZY, DOLŮ A NAHORU DĚDIČNÉ PODMNOŽINY, OHRANIČENÉ PRŮ-  
NIKOVÉ STRUKTURY A JEJICH PŘÍKLADY, UZÁVĚROVÉ OPERÁTORY, DEDEKINDOVO-  
-MACNEILLOVO ZÚPLNĚNÍ, GALISOVA KORESPONDENCE, POJMOVÉ SVAZY

DOLŮ DĚDIČNÁ PODMNOŽINA: PODMNOŽINA  $S$  SVAZU  $(P, \rho)$ , POKUD  $(\forall a \in S): L(a) \subseteq S$

NAHORU DĚDIČNÁ PODMNOŽINA: PODMNOŽINA  $S$  SVAZU  $(P, \rho)$ , POKUD  $(\forall a \in S) U(a) \subseteq S$

ÚPLNÝ SVAZ: SVAZ, V NĚMŽ MÁ KAŽDÁ PODMNOŽINA SUPREMUM I INFINUM.

IZOTONNÍ ZOBRAZENÍ: ZOBRAZENÍ  $(P, \pi) \rightarrow (R, \rho)$  SPLŇUJÍCÍ:  $(\forall a, b \in P): a \pi b \Rightarrow f(a) \rho f(b)$   
NEBO  $a \leq_{\pi} b \Rightarrow f(a) \leq_{\rho} f(b)$ .

VĚTA 1: SLOŽENÍ IZOTONNÍCH ZOBRAZENÍ JE IZOTONNÍ.

SVAZOVÝ HOMOMORFIZMUS: IZOTONNÍ ZOBRAZENÍ SVAZŮ.

VĚTA 2: NECHŤ  $X$  JE MNOŽINA A  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$  <sup>MNOŽINA PODMNOŽIN</sup> JE USPOŘÁDANÁ INKLUZÍ A PLATÍ:

$$a) \cap a \in \mathcal{L} \quad \text{PRO } \forall \emptyset \neq a \subseteq \mathcal{L}$$

$$b) X \in \mathcal{L}$$

PAK  $\mathcal{L}$  USPOŘÁDANÁ INKLUZÍ JE ÚPLNÝ SVAZ, V NĚMŽ:

$$\text{INFINUM } \bigwedge a = \bigcap_{a \in \mathcal{L}} a \quad \text{A} \quad \text{SUPREMUM } \bigvee a = \bigcap \{B \in \mathcal{L} \mid \forall a \in \mathcal{L} : a \subseteq B\} = \bigcap_{(a, b) \in \mathcal{L}} a$$

PRŮNIKOVÁ STRUKTURA: NEPRÁZDNÁ PODMNOŽINA  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$  SPLŇUJÍCÍ:  $\cap a \in \mathcal{L}$  PRO  $\forall \emptyset \neq a \subseteq \mathcal{L}$

OHRANIČENÁ PRŮNIKOVÁ STRUKTURA: PRŮNIKOVÁ STRUKTURA OBSAHUJÍCÍ MNOŽINU  $X$ .

UZÁVĚROVÝ OPERÁTOR NA  $X$ : ZOBRAZENÍ  $C: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ,  $X$  JE MNOŽINA, SPLŇUJÍCÍ:

$$① A \subseteq C(A) \quad \text{PRO } \forall A \subseteq X$$

$$② A \subseteq B \Rightarrow C(A) \subseteq C(B) \quad \text{PRO } \forall A, B \subseteq X$$

$$③ C(C(A)) = C(A) \quad \text{PRO } \forall A \subseteq X$$

UZÁVŘENÁ PODMNOŽINA VZHLÉDEM K  $C$ : PODMNOŽINA  $A$ , SPLŇUJÍCÍ  $C(A) = A$ .

VĚTA 3: ① NECHŤ  $C$  JE UZÁVĚROVÝ OPERÁTOR NA  $X$ , PAK:

$\mathcal{L}_C := \{A \subseteq X \mid C(A) = A\}$  JE OHRANIČENÁ PRŮNIKOVÁ STRUKTURA, VE  
KTERÉ  $\bigwedge a = \bigcap a$  A  $\bigvee a = C(\bigcup a)$

② NECHŤ  $\mathcal{L}$  JE OHRANIČENÁ PRŮNIKOVÁ STRUKTURA NA  $X$ , PAK:

$$C_{\mathcal{L}}(A) := \bigcap \{B \in \mathcal{L} \mid A \subseteq B\} = \bigcap_{(a, b) \in \mathcal{L}} (A \cup b) \text{ JE UZÁVĚROVÝ OPERÁTOR.}$$

$$③ \mathcal{L}_C = \mathcal{L} \quad C_{\mathcal{L}_C} = C$$

USPOŘÁDANÁ MNOŽINA DÉLKY  $m$ : USPOŘÁDANÁ MNOŽINA, V NÍŽ  $\exists$  ŘETĚZEC DÉLKY  $m$   
A  $\nexists$  ŘETĚZEC DÉLKY VĚTŠÍ NEŽ  $m$ .

ACC: PODMÍNKA SPLNĚNÁ MNOŽINOU, V NÍŽ JE KAŽDÁ NEKLEJAJÍCÍ POSLOUPNOST OD URČITÉHO PRVKU KONSTANTNÍ

DCC: PODMÍNKA SPLNĚNÁ MNOŽINOU, V NÍŽ JE KAŽDÁ NEROSTOVCI POSLOUPNOST OD URČITÉHO PRVKU KONSTANTNÍ

PODMÍNKA MAXIMALITY: PODMÍNKA SPLNĚNÁ MNOŽINOU, V NÍŽ KAŽDÁ USPOŘÁDANÁ PODMNOŽINA MÁ MAXIMÁLNÍ PRVEK

VĚTA 4: V TEORII S AXIOMEM VÝBĚRU JSOU PODMÍNKA MAXIMALITY A ACC EKVIVALENTNÍ (PRO  $\neq$  USPOŘÁDANÉ MNOŽINY)

VĚTA 5 USPOŘÁDANÁ MNOŽINA NEMÁ NEKONEČNÉ ŘETĚZCE  $\Leftrightarrow$  SPLŇUJE ACC I DCC.

ŘEZ: V USPOŘÁDANÉ MNOŽINĚ JE DOLŮ DĚDIČNÁ PODMNOŽINA  $A$ , TAKOVÁ, ŽE  $L(U(A)) = A$ .

V USPOŘÁDANÉ MNOŽINĚ JE NAHORU DĚDIČNÁ PODMNOŽINA  $A$ , TAKOVÁ, ŽE  $U(L(A)) = A$ .

V USPOŘÁDANÉ MNOŽINĚ JE DVOJICE PODMNOŽIN  $A, B$ , TAKOVÁ, ŽE  $U(A) = B \wedge L(B) = A$ .

ZÚPLNĚNÍ: USPOŘÁDANÉ MNOŽINY  $(P, \leq)$  POMOCÍ VNĚŘENÍ  $\varphi: P \hookrightarrow L$  JE ÚPLNÝ  
SVAZ  $L$

VĚTA 6: PRO  $\neq$  USPOŘÁDANÉ MNOŽINY  $(P, \leq)$  JE MNOŽINA VŠECH DOLŮ DĚDIČNÝCH PODMNOŽIN  $O(P)$  USPOŘÁDANÁ INKLÚZÍ ZÚPLNĚNÍM POMOCÍ PŘÍROZENÉHO VNĚŘENÍ  $\alpha \mapsto L(\alpha)$

VĚTA 7: ①  $A \leq L(U(A)) \quad A \leq U(L(A))$

②  $A \leq B \Leftrightarrow U(A) \geq U(B) \quad \wedge \quad L(A) \geq L(B)$

③  $L(U(L(A))) = L(A) \quad \wedge \quad U(L(U(A))) = U(A)$

GALOISOVA KORESPONDENCE:  $UL$  I  $LU$  JSOU UZÁVĚROVÉ OPERÁTORY

DEDEKIND-MCNEILLOVO ZÚPLNĚNÍ: ÚPLNÝ SVAZ  $DM(P) = \{A \leq P \mid L(U(A)) = A\}$  SPOLEČNĚ S  
VNĚŘENÍM  $\downarrow: P \hookrightarrow DM(P) \quad \downarrow: \varphi \mapsto \downarrow\{\varphi\} = \downarrow\{\varphi\}$

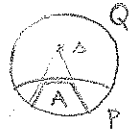
VĚTA 8:  $DM(P) = \{A \leq P \mid L(U(A)) = A\}$  JE OHRANIČENÁ PRŮNIKOVÁ STRUKTURA A Tedy ÚPLNÝ SVAZ.

VĚTA 9: JESTLIŽE  $\exists \wedge A$  V  $P$ , PAK  $\bigcap \{\downarrow\{a\} \mid a \in A\} = \downarrow\{\wedge A\}$

JESTLIŽE  $\exists \vee A$  V  $P$ , PAK  $L(U(A)) = \downarrow\{\vee A\}$

VĚTA 10:  $\downarrow: P \rightarrow DM(P)$  JE ZÚPLNĚNÍ, KTERÉ ZACHOVÁVÁ SUPREMA A INFIMA.  $\downarrow(\wedge A) = \wedge \{\downarrow a \mid a \in A\}$   
 $\downarrow(\vee A) = \vee \{\downarrow a \mid a \in A\}$

V-HUSTÁ' PODMNOŽINA. PODMNOŽINA  $P \subseteq Q$ , KTERÁ' JE USPOŘÁDANÁ A SPLŇUJE:  
PRO KAŽDÉ  $\Delta \in Q$   $\exists$  PODMNOŽINA  $A \subseteq P$  TAKOVÁ, ŽE  $\Delta = V_Q A$ .



$$\Delta = V_Q (\downarrow \{\Delta\} \cap P) = V_Q \downarrow_P \{\Delta\}$$

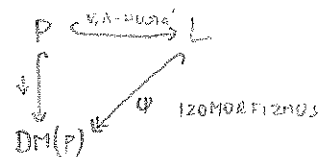
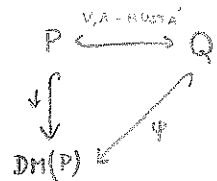
" A

VĚTA 11: NECHŤ  $Q$  JE USPOŘÁDANÁ MNOŽINA A  $P \subseteq Q$ .

- ①  $\Rightarrow$  ②  $\Rightarrow$  ③ PLATÍ OBECNĚ  
 ①  $\Leftrightarrow$  ②  $\Leftrightarrow$  ③ PLATÍ POKUD  $Q$  JE ÚPLNÝ SVAZ  
 ①  $P$  JE V-HUSTÁ V  $Q$   
 ②  $\Delta = V_Q (\downarrow \{\Delta\} \cap P)$  PRO KAŽDÉ  $\Delta$   
 ③ PRO  $\forall \Delta, \Delta' \in Q$   $\Delta < \Delta' \wedge \exists y \in P$  PRO KTERÉ  $y \leq \Delta$  A  $y \not\leq \Delta'$   $y \in \downarrow \{\Delta\} - \downarrow \{\Delta'\}$

VĚTA 12: NECHŤ  $P$  JE USPOŘÁDANÁ MNOŽINA A  $\downarrow: P \rightarrow DM(P)$  DEDEKIND-MACNEILLOVO ROZŠÍŘENÍ.

- ①  $\downarrow(P)$  JE V-HUSTÁ A  $\Lambda$ -HUSTÁ V  $DM(P)$   
 ② NECHŤ  $Q$  JE USPOŘÁDANÁ MNOŽINA A  $P \subseteq Q$ ,  
KTERÁ' JE  $\Lambda$ -HUSTÁ I V-HUSTÁ PAK  $\exists$  VLO-  
ŽENÍ  $\psi: Q \rightarrow DM(P)$  SPLÝVAJÍCÍ S  $\downarrow$  NA  $P$   
 ③ NECHŤ  $L$  JE ÚPLNÝ SVAZ A  $P \subseteq L$ , KTERÁ' JE  
 $\Lambda$ -HUSTÁ I V-HUSTÁ. PAK  $L \cong DM(P)$ , TJ.  
 $\exists$  IZOMORFIZMUS  $\psi: L \rightarrow DM(P)$  SPLÝVAJÍCÍ S  $\downarrow$  NA  $P$ .



USMĚRNĚNÁ' MNOŽINA: USPOŘÁDANÁ NEPRÁZDNÁ MNOŽINA, VE KTERÉ PRO KAŽDÉ  
DVA PRVKY  $y, z$  PLATÍ.  $U(y, z) \neq \emptyset$ .

## ② ALGEBRAICKÉ SVAZY A DOMĚNY: ALGEBRAICKÉ PRŮNIKOVÉ STRUKTURY, ALGEBRAICKÉ UZÁVĚROVÉ OPERÁTORY, ALGEBRAICKÉ SVAZY, DOMĚNY

ALGEBRAICKÁ PRŮNIKOVÁ STRUKTURA: PRŮNIKOVÁ STRUKTURA  $\mathcal{L}$ , V NÍŽ SJE DNOČENÍ KAŽDÉ USMĚRNĚNÉ MNOŽINY PATŘÍ DO  $\mathcal{L}$ .

ALGEBRAICKÝ UZÁVĚROVÝ OPERÁTOR: UZÁVĚROVÝ OPERÁTOR  $C$ , POKUD PLATÍ:  
 $C(A) = U\{C(B) \mid B \leq A \text{ a } B \text{ JE KONEČNÁ}\}$ .

VĚTA 13: NECHť  $C$  JE UZÁVĚROVÝ OPERÁTOR A  $\mathcal{L}_C$  K NĚMU PŘÍSLUŠNÁ PRŮNIKOVÁ STRUKTURA. TYTO PODMÍNKY JSOU EKVIVALENTNÍ.

①  $C$  JE ALGEBRAICKÝ UZÁVĚROVÝ OPERÁTOR.

② PRO KAŽDOU USMĚRNĚNOU PODMNOŽINU  $A \subseteq Y$  PLATÍ:  $C(UA) = U\{C(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$

③  $\mathcal{L}_C$  JE ALGEBRAICKÁ PRŮNIKOVÁ STRUKTURA.

CPO: NEBOLI USMĚRNĚNĚ ÚPLNÁ USPOŘÁDANÁ MNOŽINA JE MNOŽINA, KTERÁ MÁ NEJMENŠÍ PRVEK A KAŽDÁ JEJÍ <sup>USMĚRNĚNÁ</sup> PODMNOŽINA V NÍ MÁ SUPREMUM.

ŘETĚZCOVĚ ÚPLNÁ USPOŘÁDANÁ MNOŽINA: MNOŽINA, V NÍŽ MÁ KAŽDÝ ŘETĚZEC SUPREMUM.

VĚTA 14: V TEORII MNOŽIN S AXIOMEM VÝBĚRU JSOU ŘETĚZCOVĚ ÚPLNĚ USPOŘÁDANÉ MNOŽINY PŘÁVĚ USMĚRNĚNĚ ÚPLNÝMI USPOŘÁDANÝMI MNOŽINAMI.

PODCPO: PODMNOŽINA CPO, KTERÁ MÁ NEJMENŠÍ PRVEK A S KAŽDOU USMĚRNĚNOU PODMNOŽINOU OBSAHUJE TAKÉ JEJÍ SUPREMUM.

SPOJITÉ ZOBRAZENÍ CPO: ZOBRAZENÍ, JEŽ ZACHOVÁVÁ USMĚRNĚNÁ SUPREMA.

STRIKTNÍ ZOBRAZENÍ CPO: SPOJITÉ ZOBRAZENÍ CPO, JEŽ NAVÍC ZACHOVÁVÁ NEJMENŠÍ PRVEK.

VĚTA 15: NÁSLEDUJÍCÍ PODMÍNKY JSOU EKVIVALENTNÍ PRO  $P$  JE CPO:

①  $\forall s \exists$ , KDYKOLIV  $U(s) \neq \emptyset$

②  $\forall s \exists$ , KDYKOLIV  $s \neq \emptyset$

③  $P \oplus 1$  JE ÚPLNÝ SVAZ, KDE  $\oplus 1$  ZNAČÍ PŘIDÁNÍ NEJVĚTŠÍHO PRVKU

ÚPLNÝ POLOSVAZ: CPO SPLŇUJÍCÍ PODMÍNKY VĚTY 15.

KOMPAKTNÍ PRVEK: PRVEK  $k \in P$ ,  $P$  JE CPO, POKUD PRO KAŽDOU USMĚRNĚNOU  $D \subseteq P$

PLATÍ

$$k \leq \bigvee D \Rightarrow (\exists d \in D): k \leq d$$

↗ JE SUPREMUM  
V USMĚRNĚNÉ MNOŽINĚ

MNOŽINU  $\neq$  KOMPAKTNÍCH PRVKŮ OZNAČUJEME  $K(P)$

ALGEBRAICKÝ SVAZ: ÚPLNÝ SVAZ  $L$ , V NĚMŽ PRO  $\forall a \in L$ :  $a = \bigvee \{k \in K(L) \mid k \leq a\}$

VĚTA 16: NECHŤ  $C$  JE ALGEBRAICKÝ UZÁVĚROVÝ SYSTÉM NA  $X$  A  $\mathcal{L}_C$  PŘÍSLUŠNÁ ALGEBRAICKÁ PRŮNIKOVÁ STRUKTURA. PAK  $\mathcal{L}_C$  JE ALGEBRAICKÝ SVAZ, V NĚMŽ PRVEK  $A$  JE KOMPAKTNÍ  $\Leftrightarrow A = C(Y)$  PRO NĚJAKOU KONEČNOU  $Y \subseteq X$ .

VĚTA 17: ① NECHŤ  $\mathcal{L}$  JE OHRANIČENÁ ALGEBRAICKÁ STRUKTURA  
PAK  $\mathcal{L}$  JE ALGEBRAICKÝ SVAZ

② NECHŤ  $L$  JE ALGEBRAICKÝ SVAZ A PRO KAŽDÝ PRVEK  $a \in L$  POLOŽME  
 $D_a := \{k \in K(L) \mid k \leq a\}$  PAK  $\mathcal{L} := \{D_a \mid a \in L\}$  JE OHRANIČENÁ ALGEBRAICKÁ STRUKTURA IZOMORFNÍ S  $L$ .

DOMÉNA: ÚPLNÝ POLOSVAZ, V NĚMŽ KAŽDÝ PRVEK JE USMĚRNĚNÉ SJEDNOCENÍ ALGEBRAICKÝCH PRVKŮ.

VĚTA 18: ① KAŽDÁ ALGEBRAICKÁ PRŮNIKOVÁ STRUKTURA JE DOMÉNA.

② NECHŤ  $L$  JE DOMÉNA A PRO  $\forall a \in L$  POLOŽME  $D_a = \{k \in K(L) \mid k \leq a\}$ .

PAK  $\mathcal{L} := \{D_a \mid a \in L\}$  JE ALGEBRAICKÁ PRŮNIKOVÁ STRUKTURA IZOMORFNÍ S  $L$ .

### ③ PEVNÉ BODY: VĚTY O PEVNÝCH BODECH

PEVNÝ BOD: ZOBRAZENÍ  $f: P \rightarrow P$  JE PRVEK  $f \in P$ , SPLŇUJÍCÍ  $f(f) = f$ .

VĚTA 19: VĚTA O PEVNÝCH BODECH PRO CPO I

NECHĚ  $P$  JE CPO,  $\Phi: P \rightarrow P$  IZOTONNÍ ZOBRAZENÍ A  $\perp$  JE NEJMENŠÍ PRVEK V  $P$ . NECHĚ  $\omega = \bigvee_{n \geq 0} \Phi^n(\perp)$  A  $\mu(\Phi)$  JE NEJMENŠÍ PRVEK VE  $\text{fix}(\Phi)$ , POKUD EXISTUJE. ( $\text{fix} \Phi$  JE MNOŽINA  $\neq \emptyset$  PEVNÝCH BODŮ  $\Phi$ ).

① POKUD  $\Phi$  JE SPOJITÉ, PAK  $\mu(\Phi)$  EXISTUJE A  $\omega = \mu(\Phi)$  ( $\Leftrightarrow \omega \in \text{fix}(\Phi)$ ).

② POKUD  $\omega \in \text{fix}(\Phi)$ , PAK  $\omega = \mu(\Phi)$

VĚTA 20: KNOSTEROVA-TARSKÉHO PRO ÚPLNÉ SVAZY

NECHĚ  $L$  JE ÚPLNÝ SVAZ A  $\Phi: L \rightarrow L$  JE IZOTONNÍ ZOBRAZENÍ.

PAK  $\bigvee \{x \in L \mid x \leq \Phi(x)\} \in \text{fix}(\Phi)$ .

VĚTA 21: V TEORII MNOŽIN S AXIOMEM VÝBĚRU PLATÍ:

JESTLIŽE MÁ KAŽDÉ ZOBRAZENÍ  $f: L \rightarrow L$  VE SVAZU  $L$  PEVNÝ BOD, JE SVAZ  $L$  ÚPLNÝ.

VĚTA 22: VĚTA O PEVNÝCH BODECH PRO CPO II

NECHĚ  $P$  JE CPO A  $\Phi: P \rightarrow P$  ZOBRAZENÍ, KTERÉ JE EXTENZIVNÍ ( $\forall f \in P: f \leq \Phi(f)$ ) PAK  $\Phi$  MÁ PEVNÝ BOD.

VĚTA 23: VĚTA O PEVNÝCH BODECH PRO CPO III

NECHĚ  $P$  JE CPO A  $\Phi: P \rightarrow P$  IZOTONNÍ ZOBRAZENÍ. PAK  $\Phi$  MÁ NEJMENŠÍ PEVNÝ BOD.

VĚTA 24: JESTLIŽE  $P$  JE USPOŘÁDANÁ MNOŽINA TAKOVÁ, ŽE KAŽDÉ IZOTONNÍ ZOBRAZENÍ

$\Phi: P \rightarrow P$  MÁ PEVNÝ BOD, PAK  $P$  JE CPO.

SWAZ: NEPRÁZDNÁ USPOŘÁDANÁ MNOŽINA, V NÍŽ MÁ KAŽDÁ DVOUPRVKOVÁ PODMNOŽINA SUPREMUM I INFINUM

SWAZOVÁ ALGEBRA: ALGEBRA  $(L, \wedge, \vee)$  SPLŇUJÍCÍ IDENTITY:

$$\begin{aligned} a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c & a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c \\ a \vee b &= b \vee a & a \wedge b &= b \wedge a \\ a \vee a &= a & a \wedge a &= a \\ a \vee (b \wedge a) &= a & a \wedge (b \vee a) &= a \end{aligned}$$

VĚTA 25:  $\exists$  JEDNOZNAČNÉ PŘÍŘAZENÍ SWAZŮ A SWAZOVÝCH ALGEBER:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

DISTRIBUTIVNÍ SWAZOVÁ ALGEBRA: SWAZOVÁ ALGEBRA SPLŇUJÍCÍ PODMÍNKY:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \end{aligned}$$

IDEÁL: J SWAZU L JE  $\emptyset \neq J \subseteq L$ , JESTLIŽE:

- ①  $a, b \in J \Rightarrow a \vee b \in J$
- ②  $a \in L, b \in J, a \leq b \Rightarrow a \in J$

EKVIVALENTNĚ  $L(U(a, L)) \subseteq J$ , PAK  $L(U(K)) \subseteq J$ , KDE  $K \subseteq J$  JE KONEČNÁ NEPRÁZDNÁ.

FILTR: DUÁLNÍ IDEÁL.

VLASTNÍ IDEÁL: IDEÁL, KDE  $J \neq L$ .

HLAVNÍ IDEÁL: IDEÁL, PRO NĚJŽ  $\exists a \in L$  TAKOVÉ, ŽE  $J = \downarrow a = L(a)$ .

VĚTA 26: IDEÁL JE ŘEZ, POKUD  $J = L(U(J))$

PRVOIDEÁL: IDEÁL TAKOVÝ, ŽE PRO  $a, b \in L$  A  $a \wedge b \in J$  PLATÍ  $a \in J$  V  $b \in J$ .

MNOŽINU VŠECH PRVOIDEÁLŮ ZNAČÍME  $J_p(L)$ .

MNOŽINU VŠECH PRVOFILTRŮ ZNAČÍME  $F_r(L)$ .

VĚTA 27: J JE PRVOIDEÁL V L  $\Leftrightarrow L \setminus J$  JE PRVOFILTR V L.

MAXIMÁLNÍ IDEÁL: IDEÁL, KTERÝ JE MAXIMÁLNÍ V  $J(L) \setminus \{L\}$  VZHLEDEM K INKLUZI.

VĚTA 28: V DISTRIBUTIVNÍM SWAZU S NEJVĚTŠÍM PRVKEM JE KAŽDÝ MAXIMÁLNÍ IDEÁL PRVOIDEÁL.

VĚTA 29: PRO VLASTNÍ IDEÁL  $J$  V BOOLEOVĚ SVAZU  $B$  JSOU EKVIVALENTNÍ:

DŮSLEDEK

- ①  $J$  JE MAXIMÁLNÍ
- ②  $J$  JE PRVOIDEÁL
- ③ PRO  $\forall a \in B: a \in J \Leftrightarrow a' \notin J$

VĚTA 30: NA POTENCIÍ MNOŽINĚ  $P(S)$  JSOU EKVIVALENTNÍ PODMÍNKY PRO VLASTNÍ FILTR:

- ①  $F$  JE ULTRAFILTR, TJ. DŮÁLNÍ MAXIMÁLNÍ IDEÁL
- ②  $F$  JE PRVOFILTR
- ③ PRO KAŽDOU MNOŽINU  $A \subseteq S$  BUĎ  $A \in F$  NEBO  $S - A \in F$
- ④  $B \subseteq S$  PATŘÍ DO  $F$ , POKUD  $A \cap B \neq \emptyset$  PRO KAŽDOU  $A \in F$
- ⑤ PRO DANÉÍ PO DVOU DISJUNKTNÍ  $A_1, A_2, \dots, A_m$  PRO NĚŽ  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = S$ , EXISTUJE JEDINÝ INDEX  $j$  TAKOVÝ, ŽE  $A_j \in F$

DPI: PRO DISTRIBUTIVNÍ SVAZ  $L$ , IDEÁL  $J$  V  $L$  A DŮÁLNÍ IDEÁL  $G$  V  $L$ , PRO NĚŽ  $J \cap G = \emptyset$  EXISTUJE  $I \in J_p(L)$  A  $F = L \cdot I \in F_p(L)$  TAKOVÉ, ŽE  $J \subseteq I$ ,  $G \subseteq F$ .

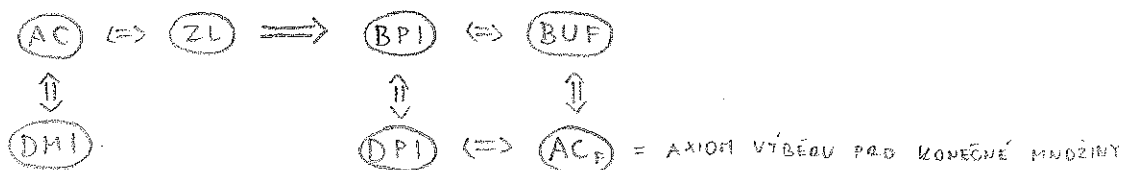
BPI: PRO BOOLEOVSKÝ SVAZ  $B$  A VLASTNÍ IDEÁL  $J$  V  $B$  EXISTUJE  $I \in J_p(B)$  TAKOVÝ, ŽE  $J \subseteq I$

VĚTA 31: ① ZORNOVO LEMMA  $\Rightarrow$  BPI  
② ZORNOVO LEMMA  $\Rightarrow$  DPI

DMI: KAŽDÝ DISTRIBUTIVNÍ SVAZ S NEJVĚTŠÍM PRVKEM OBSAHUJE MAXIMÁLNÍ IDEÁL

BUF: KAŽDÝ VLASTNÍ FILTR V BOOLEOVĚ SVAZU JE OBLAŽEN V PRVOFILTRU (DŮÁLNÍ BPI)

VĚTA 32:



⑥ BOOLEOVSKÉ A DISTRIBUTIVNÍ SVAZY A TOPOLOGIE: DUALITA MEZI KONEČNÝMI DISTRIBUTIVNÍMI SVAZY A KONEČNÝMI USPOŘÁDANÝMI MNOŽINAMI, REPRESENTACE SVAZY MNOŽIN, REPRESENTACE BOOLEOVSKÝCH A OHRANIČENÝCH DISTRIBUTIVNÍCH SVAZŮ V DUALNÍM PROSTORU, DUALITA

MNOŽINOVÝ SVAZ: MNOŽINA MNOŽIN UZAVŘENÁ KE SJEDNOCENÍ A PRŮNIKU SVÝCH PRVKŮ.

VĚTA 33: NECHŤ  $L$  JE SVAZ. PAK  $\mu: \alpha \mapsto \{I \in J_p(L) \mid \alpha \notin I\}$  JE SVAZOVÝ HOMOMORFIZMUS  $L \rightarrow \mathcal{P}(J_p(L))$ .

ZOBRAZENÍ  $\mu$  JE PROSTÉ VÝHRADNĚ POKUD  $L$  JE DISTRIBUTIVNÍ.

VĚTA 34: PRO SVAZ  $L$  JSOU EKVIVALENTNÍ PODMÍNKY:

- ①  $L$  JE DISTRIBUTIVNÍ
- ② PRO KAŽDÝ IDEÁL  $J$  V  $L$  A FILTR  $G$  V  $L$ , PRO NĚŽ  $J \cap G = \emptyset$  EXISTUJE PRVOIDEÁL SPLŇUJÍCÍ  $J \subseteq I$  A  $I \cap G = \emptyset$ . (PRVOIDEÁL BUDE JEN VLASTNÍ)
- ③ PRO  $a \neq 0$  EXISTUJE PRVOIDEÁL  $I$ , PRO NĚŽ  $a \notin I$  A  $0 \notin I$
- ④ ZOBRAZENÍ  $\alpha \mapsto X_\alpha = \{I \in J_p(L) \mid \alpha \notin I\}$  JE VLOŽENÍ  $L$  DO  $\mathcal{P}(J_p(L))$
- ⑤  $L$  JE IZOMORFNÍ SE SVAZEM MNOŽIN

VĚTA 35: PRO BOOLEOVU ALGEBRU  $B$ :

- ① PRO KAŽDÝ IDEÁL  $J$  V  $B$  EXISTUJE MAXIMÁLNÍ IDEÁL  $I \in J_p(B)$ :  $J \subseteq I$ .
- ② PRO  $a \neq b$  ( $\in B$ ) EXISTUJE MAXIMÁLNÍ IDEÁL  $I \in J_p(B)$ , OBSAHUJÍCÍ PRÁVĚ JEDEN Z PRVKŮ  $a, b$
- ③ EXISTUJE IZOMORFIZMUS  $B$  NA PODALGEBRU V  $\mathcal{P}(J_p(B))$

VĚTA 36: MNOŽINA OBOJETNÝCH MNOŽIN (UZAVŘENÝCH A OTEVŘENÝCH SOUČAJNĚ) V TOPOLOGICKÉM PROSTORU JE BOOLEOVSKÁ ALGEBRA

VĚTA 37:  $J_p(B)$  JE KOMPAKTNÍ V PROSTORU  $(J_p(B), \mathcal{T})$

DOPLNIT PŘEDCHÁZELÍCÍ SVAZU

VĚTA 38: OBOJETNÉ PODMNOŽINY V  $(I_P(B), \mathcal{T})$  JSOU PRAVĚ  $X_a$ ,  $a \in B$ . PRO KAŽDÉ PRVOIDEÁLY  $x, y \in J_P(B)$  EXISTUJE OBOJETNÁ MNOŽINA  $V$  TAKOVÁ, ŽE  $x \in V = X_a$  A  $y \notin V$ .

VĚTA 39: STONEOVA VĚTA O REPREZENTACI BOOLEOVÝCH ALGEBER  
NECHŤ  $B$  JE BOOLEOVA ALGEBRA ZOBRAZENÍ  $a \mapsto X_a = \{I \in J_P(B) \mid a \in I\}$   
JE IZOMORFIZMUS BOOLEOVSKÝCH ALGEBER  $B$  NA BOOLEOVSKOU ALGEBRU VŠECH OBOJETNÝCH PODMNOŽIN DUALNÍHO PROSTORU  $(J_P(B), \mathcal{T})$

TOTÁLNĚ NESOUVISLÝ TOPOLOGICKÝ PROSTOR: TOPOLOGICKÝ PROSTOR, V NĚMŽ PRO DVA RŮZNÉ BODY  $x$  A  $y$  EXISTUJE OBOJETNÁ PODMNOŽINA  $V \subseteq X$  TAKOVÁ, ŽE  $x \in V$ ,  $y \notin V$ .

BOOLEOVSKÝ TOPOLOGICKÝ PROSTOR: KOMPAKTNÍ, TOTÁLNĚ NESOUVISLÝ TOPOLOGICKÝ PROSTOR.

VĚTA 40:  $(J_P(B), \mathcal{T})$  JSOU BOOLEOVSKÉ

VĚTA 41: TOTÁLNĚ NESOUVISLÝ TOPOLOGICKÝ PROSTOR JE HAUSDORFOV. ZEJMÉNA BOOLEOVSKÉ JSOU KOMPAKTNÍ HAUSDORFOVY PROSTORY

VĚTA 42: V TEORII MNOŽIN S AXIOMEM VÝBĚRU PLATÍ:

NECHŤ  $(X, \mathcal{T})$  JE BOOLEOVSKÝ PROSTOR:

① POKUD  $Y$  JE UZAVŘENÁ V  $X$  A  $x \notin Y$ , PAK EXISTUJE OBOJETNÁ  $V$  TAKOVÁ, ŽE  $Y \subseteq V$  A  $x \notin V$ .

② JESTLIŽE  $Y$  A  $Z$  JSOU UZAVŘENÉ V  $X$ ,  $Y \cap Z = \emptyset$ , PAK EXISTUJE OBOJETNÁ  $U$  TAKOVÁ, ŽE  $Y \subseteq U$  A  $Z \cap U = \emptyset$ .

HOMEOMORFIZMUS: IZOMORFIZMUS TOPOLOGICKÝCH PROSTORŮ, TJ. BIEKCE, KTERÁ JE SPOJITÁ A SPOJITÁ JE I JEJÍ INVERZE

VĚTA 43: NECHŤ  $Y$  JE BOOLEOVSKÝ PROSTOR,  $B = P(Y)$  ALGEBRA JEHO OBOJETNÝCH PODMNOŽIN A  $X$  DUALNÍ PROSTOR ALGEBRY  $B$ . PAK  $X$  A  $Y$  JSOU HOMEOMORFNÍ

VĚTA 44: NECHŤ  $B$  JE BOOLEOVSKÁ ALGEBRA,  $Y$  JE BOOLEOVSKÝ PROSTOR TAKOVÝ, ŽE  $P(Y) \cong B$ . PAK DUALNÍ PROSTOR ALGEBRY  $B$  JE HOMEOMORFNÍ S  $Y$

VĚTA 45:  $(I_P(L), \mathcal{T})$  JE KOMPAKTNÍ.

VĚTA 46: PRO CLOD PROSTORY  $(Y, \mathcal{T}, \sigma)$  PLATÍ:

①  $x \leq y \Leftrightarrow y \in U \Rightarrow x \in U$  PRO  $\forall U \in \sigma(Y)$

②  $Y, Z$  UZAVŘENÉ,  $Y \cap Z = \emptyset$ ,  $Y$  DOLŮ,  $Z$  NAHORU DĚJÍCÍ, PAK  $\exists U \in \sigma(Y)$ :  
 $Y \subseteq U$ ,  $Z \cap U = \emptyset$ .

VĚTA 47: NECHŤ  $L$  JE OHRANIČENÝ DISTRIBUTIVNÍ SVAZ A  $(I_p(L), \gamma, \varepsilon)$  JE HO DUÁLNÍ PROSTOR PAK PLATÍ:

- ① UZAVŘENÉ PODMNOŽINY JSOU PRAVĚ  $\bigcap_{i=1}^n X_{L_i} \cap (X - X_{C_i})$
- ② OBOJETNÉ DOLŮ DĚDIČNÉ PODMNOŽINY JSOU PRAVĚ  $X_d$ .

VĚTA 48: PRESTLYOVÉ VĚTA O REPREZENTACI OHRANIČENÝCH DISTRIBUTIVNÍCH SVAZŮ

NECHŤ  $L$  JE OHRANIČENÝ DISTRIBUTIVNÍ SVAZ PAK ZOBRAZENÍ

$\alpha \mapsto X_\alpha = \{I \in I_f(L) \mid \alpha \notin I\}$  JE IZOMORFIZMUS  $L$  NA SVAZ VŠECH

OBOJETNÝCH DOLŮ DĚDIČNÝCH PODMNOŽIN DUÁLNÍHO PROSTORU  $(I_p(L), \gamma, \varepsilon)$

VĚTA 49: NECHŤ  $Y$  JE CPOD PROSTOR A  $X$  DUÁLNÍ PROSTOR SVAZU  $(\sigma(Y), \cap, \cup)$ . PAK

$Y$  A  $X$  JSOU IZOMORFNÍ A HOMEOMORFNÍ.

VĚTA 50: NECHŤ  $L$  JE OHRANIČENÝ DISTRIBUTIVNÍ SVAZ A  $Y$  JE CPOD PROSTOR, PRO

NĚJŽ  $\sigma(Y) \cong L$ . PAK DUÁLNÍ PROSTOR  $X$   $L : (I_p(L), \gamma, \varepsilon)$  JE IZOMORFNÍ

A HOMEOMORFNÍ S  $Y$ .